Kaprekar 数の置換による分類

名古屋工業大学　大学院工学研究科　工学専攻　情報数理プログラム
武田晃典 (Akinori TAKEDA)

概要

Kaprekar 数とは，$6174 = 7641 - 1467$ のように，その数の各桁の数字を降順に並べた数と昇順に並べた数との差が元の数に等しくなる自然数である．一般の自然数 $t \geq 2$ に対しても，同様に t 進 Kaprekar 数が定義できる．$t = 10$ あるいは $t = 2, 3$ などの場合には，すべての t 進 Kaprekar 数が決定されているが，一般の t においては，そのような結果は知られていないようだ．本発表では，Kaprekar 数を並び替える際の置換に着目して，t 進 Kaprekar 数を分類する試みを紹介する．

1　はじめに

自然数 6174 は、各桁の値を降順に並べた数 7641 と，昇順に並べた数 1467 との差が元の数に一致するという性質を持つ．このような性質を持つ自然数は Kaprekar 数と呼ばれ，1955 年 D. R. Kaprekar によって考察されたことから，その名がつけられている．

Kaprekar 数が，いつ，どのような形で現れるかについては，Prichett[2]，Iwasaki[1] によって整理されており，次の 5 系列がその一覧である．

$$\underbrace{5\cdots}_{x}4\underbrace{9\cdots}_{x+1}\underbrace{4\cdots}_{x}5$$

$$6\underbrace{3\cdots}_{x}17\underbrace{6\cdots}_{x}4$$

$$\underbrace{8\cdots}_{x+1}\underbrace{6\cdots}_{x+1}\underbrace{4\cdots}_{x+1}\underbrace{3\cdots}_{y}\underbrace{2\cdots}_{x}1\underbrace{9\cdots}_{x+1}\underbrace{7\cdots}_{x+1}\underbrace{6\cdots}_{y}\underbrace{5\cdots}_{x+1}\underbrace{3\cdots}_{x+1}\underbrace{1\cdots}_{x}2$$

$$\underbrace{8\cdots}_{x+1}\underbrace{7\cdots}_{2y}\underbrace{6\cdots}_{x+1}\underbrace{5\cdots}_{y}\underbrace{4\cdots}_{x+y+1}\underbrace{3\cdots}_{y}\underbrace{2\cdots}_{x+y}1\underbrace{9\cdots}_{x+2y+1}\underbrace{8\cdots}_{x+y+1}\underbrace{6\cdots}_{y}\underbrace{5\cdots}_{x+y+1}\underbrace{4\cdots}_{y}\underbrace{3\cdots}_{x+1}\underbrace{2\cdots}_{2y}\underbrace{1\cdots}_{x+1}2$$

$$\underbrace{9\cdots}_{x+1}\underbrace{8\cdots}_{w}\underbrace{7\cdots}_{z+1}\underbrace{6\cdots}_{w}\underbrace{5\cdots}_{z+1}\underbrace{4\cdots}_{w}\underbrace{3\cdots}_{y}\underbrace{2\cdots}_{w}\underbrace{1\cdots}_{z}0\underbrace{9\cdots}_{w}\underbrace{8\cdots}_{z+1}\underbrace{7\cdots}_{w}\underbrace{6\cdots}_{y}\underbrace{5\cdots}_{w}\underbrace{4\cdots}_{z+1}\underbrace{3\cdots}_{w}\underbrace{2\cdots}_{z+1}\underbrace{1\cdots}_{w}\underbrace{0\cdots}_{x}1$$

さらに，位取りの基数を一般の自然数 t まで拡張したものを t 進 Kaprekar 数という．

本研究では，これらの系列の最も基本的な部分，

$$495,\ 6174,\ 864197532,\ 97508421$$

に注目して単位 Kaprekar 数と呼び，これらの各桁の数を降順に並び替える置換を考察する．単位 Kaprekar 数は 6174 の置換クラス，495，864197532 の置換クラス，97508421 の置換クラスの 3 種類に分類することができる．

記号

- 自然数 $a = a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ の t 進表記を $a_1 \cdots a_{n(t)}$ と書く．
- n 文字の置換 σ に対し，
$$P_\sigma \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ a_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$
により置換行列 P_σ を定義する．特に，n を明記する場合は $P_{n,\sigma}$ と書く．

2　準備

定義 2.1 (t 進 Kaprekar 数)**.** *n, t を 2 以上の自然数とする．t 進 n 桁の正整数 a に対して，a', a'' をそれぞれ t 進表記した際の各位の数字を降順，昇順に並べた数とする．a の最上位の桁は 0 であってもよい．このとき，*
$$a = a' - a''$$
を満たす a を t 進 Kaprekar 数という．

例 2.2. *10 進法では，1 桁，2 桁の Kaprekar 数は存在せず，3 桁，4 桁においては，Kaprekar 数がただ 1 つ存在する．実際に，*
$$495 = 954 - 459$$
$$6174 = 7641 - 1467$$
である．

この性質は基数に依存するため，自然数 t に対し，t 進法における Kaprekar 数はそれぞれ異なる．

例 2.3. *$3021_{(4)}$ は 4 進法において Kaprekar 数であるが，10 進法においては Kaprekar 数とはならない．実際に，$3021_{(4)} = 201_{(10)}$ であるが，$210 - 012 = 198$ となる．*

t 進 n 桁の自然数 $a = a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ を n 次列ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1 \ \cdots \ a_n)^T$ と同一視する．このとき，a', a'' のベクトル表示も，それぞれ $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{a}''$ と書く．さらに，$\boldsymbol{a}' = P\boldsymbol{a}$ を満たす置換行列 P を，a の降順置換行列と呼ぶ．一般に，ある自然数に対して降順置換行列は複数存在し得る．

n 次ベクトルを t 進 n 桁の自然数とみなしたときの加算・減算は，各成分を 0 以上 $t-1$ 以下とするための補助的な項が必要となる．自然数 a を Kaprekar 数とするとき，定義より
$$a - (a' - a'') = 0 \tag{1}$$
である．しかし，左辺をベクトルとみなした場合，一般に 0 ベクトルとはならない．$\boldsymbol{\epsilon}$ を
$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'') \tag{2}$$
とおいて，その形を求める．

例 2.4 (ベクトル減算との差異)**.** a を *10* 進 *Kaprekar* 数 *6174* として考える．式 *(1)* は

$$6174 - (7641 - 1467) = 0$$

となり成立する．一方で，式 *(2)* は

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

であり，これは次のように表すことができる：

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (10I - L) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ここで，I は単位行列であり，L は左シフト行列

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

である．（ここでは，I，L は *4* 次行列だが，一般に n 次でも I，L の記号を使う.）

t 進 n 桁の *Kaprekar* 数 a に対して，δ_a と $\boldsymbol{c}_n(\delta_a)$ を定義 *2.5* のように定めると，誤差 $\boldsymbol{\epsilon}$ は

$$\boldsymbol{\epsilon} = (tI - L)\boldsymbol{c}_n(\delta_a)$$

と表すことができる.

定義 2.5. a を t 進 n 桁の自然数とする.

(i) $\boldsymbol{a}'$，$\boldsymbol{a}''$ の第 i 成分をそれぞれ a'_i，a''_i とするとき，

$$\delta_a = \#\{i \mid a'_i = a''_i,\ 1 \leq i \leq [n/2]\}.$$

(ii) *0* 以上 $[n/2]$ 未満の自然数 δ に対して $\boldsymbol{c}_n(\delta)$ を，n 次のベクトルで第 *1* 成分から第 $[n/2] - \delta$ 成分まで *0*，第 $[n/2] - \delta + 1$ 成分から第 n 成分まで *1* であるものとする.

以上より，Kaprekar 数のベクトル表記 $\boldsymbol{a}$ が満たすべき等式は，

$$\boldsymbol{a}' - \boldsymbol{a}'' = \boldsymbol{a} + (tI - L)\boldsymbol{c}_n(\delta_a)$$

であることがわかった．さらに，a の降順置換行列 P を用いて等式を整理すると，

$$P\boldsymbol{a} - JP\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + (tI - L)\boldsymbol{c}_n(\delta_a)$$

となる．ただし，J はベクトルを反転させる置換行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

である．P を n 次置換行列とするとき，行列 $M(P)$ を

$$M(P) = (J - I)P + I$$

と定める．以上の考察により，次が示される．

命題 2.6. *t 進 n 桁の Kaprekar 数 a は，その降順置換行列 P について次の等式を満たす：*

$$M(P)\boldsymbol{a} = (tI - L)\boldsymbol{c}_n(\delta_a). \tag{3}$$

Kaprekar 数 a から置換行列 P と δ_a を決定することは容易にできる．これとは逆に，与えられた P と δ に対し，等式 (3) を a に関する方程式とみなして，解 a が Kaprekar 数になるか考察する．

定義 2.7. *t をパラメータとする．n 次の置換行列 P と自然数 δ $(0 \le \delta < [n/2])$ に対し，方程式*

$$M(P)\boldsymbol{x} = (tI - L)\boldsymbol{c}_n(\delta) \tag{4}$$

を考える．方程式 (4) を Kaprekar 方程式と呼ぶ．また，$\boldsymbol{x}(t)$ を (4) の解とし以下の用語を定める．

- *(i) 2 以上の整数 t_0 が存在し，$\boldsymbol{x}(t_0)$ が t_0 進 Kaprekar 数となるとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を有効な解と呼ぶ．*
- *(ii) 有効な解のうち，(i) を満たす t_0 が無数に存在するものを正則解と呼ぶ．また，正則解ではない有効な解 $\boldsymbol{x}(t)$ を特異解と呼ぶ．*

命題 2.6，定義 2.7 により，任意の t_0 進 n 桁 Kaprekar 数 a は，必ずある Kaprekar 方程式の有効な解 $\boldsymbol{x}(t)$ により $a = \boldsymbol{x}(t_0)$ と表せることがわかる．

定義 2.8. *a を t_0 進 n 桁の Kaprekar 数とする．$a = \boldsymbol{x}(t_0)$ となる正則解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在しないとき，a を特異 Kaprekar 数と呼ぶ．*

一般に, Kaprekar 方程式 (4) が解 $\boldsymbol{x}(t)$ を持てば, $\boldsymbol{x}(t)$ の各成分は t の 1 次式である．$\boldsymbol{x}(t) = t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ と表したとき，$\mathrm{Coef}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$，$\mathrm{Const}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と定める．

命題 2.9. *$\boldsymbol{x}(t)$ を n 次置換行列 P に関する Kaprekar 方程式 (4) の解とし, $\boldsymbol{a} = \mathrm{Coef}\,\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b} = \mathrm{Const}\,\boldsymbol{x}$ とおく．$\boldsymbol{x}(t)$ が正則解ならば次の式が成り立つ．*

- *(i) $i = 1, \cdots, n$ について，次のいずれかを満たす．*
  - *(i-1) $0 < a_i < 1$*
  - *(i-2) $a_i = 0$ かつ $b_i \ge 0$*
  - *(i-3) $a_i = 1$ かつ $b_i < 0$*
- *(ii) $P\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$ である．$i < j$ で $(P\boldsymbol{a})_i = (P\boldsymbol{a})_j$ となるとき $(P\boldsymbol{b})_i > (P\boldsymbol{b})_j$ である．*

定義 2.10. *Kaprekar 方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が命題 2.9 の (i), (ii) を満たすとき $\boldsymbol{x}(t)$ を半正則解と呼ぶ．*

半正則解が正則解となるには，$\boldsymbol{x}(t)$ の各成分が同時に整数になる t の値の存在が求められる．

例 2.11. *$n = 4$ としたとき，置換行列 P は 24 通り，δ は 2 通り存在する．これら 48 通りの組み合わせについて Kaprekar 方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めると，特異解が得られる組み合わせ，対応する*

Kparekar 数 a は

$$\begin{array}{lll}
\delta = 0, & P = P_{(24)},\ P_{(412)},\ P_{(234)},\ P_{(4123)}, & a = 1001_{(2)} \\
\delta = 0, & P = P_{(324)}, & a = 3021_{(4)} \\
\delta = 1, & P = P_{(14)}, P_{(142)}, P_{(143)}, & a = 0111_{(2)}
\end{array}$$

のみである．同様に，正則解が得られる組み合わせは

$$\delta = 0, \quad P = P_{(3124)}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3t \\ t-5 \\ 4t-5 \\ 2t \end{pmatrix}$$

のみである．以上の解が有効な解のすべてとなる．

一般に，大きな桁の Kaprekar 数には，特定の数字の繰り返しが現れる．例えば，6174, 631764, 63317664, 6333176664, $\cdots$ のような形である．これらの系列で増えていく部分は，必ず 36 の形をしており，この部分も Kaprekar 数全体とほぼ同様の方程式により求めることができる．より具体的には，1 つの Kaprekar 方程式を部分に分解できるのである．

定義 2.12. *Kaprekar* 方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が，ある置換行列 $P_{n,\tau}$ と P_{k_i,σ_i} $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ j,\ j \geq 2)$ によって

$$\begin{pmatrix} M(P_{k_1,\sigma_1}) & & & O \\ & M(P_{k_2,\sigma_2}) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & M(P_{k_j,\sigma_j}) \end{pmatrix} P_{n,\tau}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} (tI-L)\boldsymbol{c}_{k_1}(\delta_1) \\ (t-1)\boldsymbol{c}_{k_2}(\delta_2) \\ \vdots \\ (t-1)\boldsymbol{c}_{k_j}(\delta_j) \end{pmatrix}$$

と表されるとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を複合解，表されないとき，$\boldsymbol{x}(t)$ を単位解という．

以上の準備のもと，3 種類の置換クラスを導入する．

定義 2.13. $\delta = 0$ の *Kaprekar* 方程式

$$M(P)\boldsymbol{x} = (tI - L)\boldsymbol{c}_n(0) \tag{5}$$

に対して，置換行列の集合 *Class A, Class B, Class C* を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
\textit{Class } A &= \{P : n \text{ 次置換行列} \mid n : \text{偶数，正則単位解 } \boldsymbol{x}(t) \text{ が方程式 (5) を満たす}\} \\
\textit{Class } B &= \{P : n \text{ 次置換行列} \mid n : \text{奇数，正則単位解 } \boldsymbol{x}(t) \text{ が方程式 (5) を満たす}\} \\
\textit{Class } C &= \{P : n \text{ 次置換行列} \mid \text{特異単位解 } \boldsymbol{x}(t) \text{ が方程式 (5) を満たす}\}
\end{aligned}$$

3 Class A

n を偶数，$\delta = 0$ とし，P を n 次置換行列とした場合の Kaprekar 方程式

$$M(P)\boldsymbol{x} = (tI - L)\boldsymbol{c}_n(0)$$

の正則単位解について考察する．

まず，半正則単位解が $(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times/\langle 2,-1\rangle$ （s はある奇数）の剰余類と対応することを示す．n 次の半正則単位解 $\boldsymbol{x}(t)$ が与えられたとき，$\mathrm{Coef}\,\boldsymbol{x}$ を既約分数で表したときの分母の最小公倍数を s とし，$s(\mathrm{Coef}\,\boldsymbol{x}) = (a_1,\ \cdots,\ a_n)^T$ とすれば，$1 \le a_i < s$ $(i = 1,\ \cdots,\ n)$ であって，

$$\{a_1,\ \cdots,\ a_n\} \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times/\langle 2,-1\rangle$$

を満たす．逆に，

$$\{b_1,\ \cdots,\ b_n\} \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times/\langle 2,-1\rangle$$

が与えられれば，$1 \le b_n < \cdots < b_1 < s$ となるように b_i $(i = 1,\ \cdots,\ n)$ を選び，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \equiv P\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}\right) \pmod{s}$$

を満たす置換行列 P による Kaprekar 方程式を解くことで半正則単位解 $\boldsymbol{x}(t)$ が得られる．

半正則単位解を与える置換行列 P の特徴づけができる．

定義 3.1. 奇数 $s \ge 3$ に対して，$Y \in (\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times/\langle 2,-1\rangle$ を自然数の集合とみなし，

$$\boldsymbol{y} = (y_1\ \cdots\ y_m)^T\ (y_1,\ \cdots,\ y_m \in Y)$$

とおく．このとき，$\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}'' \pmod{s}$ の降順置換行列 P がただ一つ定まる．この P は s, Y から定まる．$k = \min\{y_1,\ \cdots,\ y_m\}$ とおくと，P は s, k からも定まるので $P = A_{s,k}$ と書く．特に，$s = 2^r \pm 1$ であるものを $A^*_{s,k}$ と表す．$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}'$，$\boldsymbol{y}''$ のための便宜的な表記のため，成分の順番は問わない．また，$m = \#\langle 2,-1\rangle$ であり，-1 の位数は 2 であることから m は偶数である．

命題 3.2. *偶数次，$\delta = 0$ の Kaprekar 方程式の半正則単位解の全体と，すべての奇数 $s \ge 3$ に対する $(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^\times/\langle 2,-1\rangle$ の剰余類の全体は 1 対 1 に対応する．また，対応する置換行列の全体は $\{A_{s,k}\}_{s,k}$ である．*

これらの考察を踏まえて観察した限りでは，n 次の正則単位解 $\boldsymbol{x}(t)$ は $(\mathbb{Z}/(2^{\frac{n}{2}} \pm 1)\mathbb{Z})^\times/\langle 2,-1\rangle$ の剰余類と 1 対 1 に対応している．

例 3.3. $n = 4$ では

$$\delta = 0, \quad P = P_{(3124)}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3t \\ t-5 \\ 4t-5 \\ 2t \end{pmatrix}$$

が唯一の正則解であった．$\#\langle 2,-1\rangle = 4$ となるのは $s = 5$ に限られ，$Y = \{1,2,3,4\}$ である．

$$\mathrm{Coef}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}' - \boldsymbol{y}'' = (3\ 1\ 4\ 2)^T$$

により，$A^*_{5,1} = P_{(1243)}$ である．

命題 3.2 の ‘半正則’ を ‘正則’ に置き換えたとき，対応する置換行列の集合も小さくなる．実際に縮小した範囲として予想されるのが $\{A^*_{s,k}\}_{s,k}$ である．

予想 3.4. 各偶数 $n \geq 2$ に対し，n 次置換行列，$\delta = 0$ の *Kaprekar* 方程式の正則単位解の全体と，

$$(\mathbb{Z}/(2^{\frac{n}{2}}+1)\mathbb{Z})^{\times}/\langle 2,-1\rangle \cup (\mathbb{Z}/(2^{\frac{n}{2}}-1)\mathbb{Z})^{\times}/\langle 2,-1\rangle$$

は *1* 対 *1* に対応する．また，対応する置換行列の全体は $\left\{A^*_{2^{\frac{n}{2}}+1,k}\right\}_k \cup \left\{A^*_{2^{\frac{n}{2}}-1,k}\right\}_k$ である．すなわち，*Class* $A = \{A^*_{s,k}\}_{s,k}$ である．

例 3.5. $\{A_{s,k}\}$ に属するが $\{A^*_{s,k}\}$ に属さない行列の中で最小次数のものは *10* 次置換行列 $A_{11,1} = P_{(1\ 2\ 4\ 8\ 5\ 10\ 9\ 7\ 3\ 6)}$ である．（実際，$(\mathbb{Z}/s\mathbb{Z})^{\times}$ $(s \neq 2^r \pm 1)$ の部分群 $\langle 2,-1\rangle$ の位数が最小となるのは $s = 11$ のときである．）この行列 $A_{11,1}$ についての $\delta = 0$ の *Kaprekar* 方程式を解くと，

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{t}{11}\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 19 \\ 7 \\ 28 \\ 38 \\ 26 \\ 14 \\ 13 \\ -10 \end{pmatrix}$$

が得られる．$\boldsymbol{x}(t)$ の各成分を通分し，分子を *3* を法として考えると，± 1 のいずれかとなるため，いずれの成分も整数とはならない．したがって，$\boldsymbol{x}(t)$ は正則解ではない．

簡単な考察により，$A_{s,k}J = JA_{s,k}$ が成り立つことがわかる．一般に，J と可換な置換行列に関しては次が成立する．

命題 3.6. P を置換行列とする．P, J が可換であるとき，$M(P)$ は正則である．

系 3.7. 行列 $A_{s,k}$ に関する *Kaprekar* 行列 $M(A_{s,k})$ は正則である．すなわち，置換行列 P が *Class* A に含まれるとき，$M(P)$ は正則である．

4 Class B

桁数が奇数の場合は，偶数の場合と異なり置換行列のある種の対称性が見られないため，正則単位解を与える置換行列の厳密な決定には至っていない．ただし，観察の範囲内では正則単位解を与えるすべての置換行列は，次に示す $\{B_n\}$ に属するものであった．

定義 4.1. n を奇数とする．n 次行列 B_n を次で定める：

$$B_n := P_{(n-1\ n)}P_{\sigma_n}, \quad \sigma_n(i) = \begin{cases} 2i & \textit{if } i \leq (n-1)/2, \\ 2i - n & \textit{if } i > (n-1)/2. \end{cases}$$

Kaprekar 行列 $M(B_n)$ が正則ならば，B_n による Kaprekar 方程式の唯一の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \frac{2t}{n+1}\begin{pmatrix}(n-1)/2\\ \vdots\\ 1\\ (n+1)/2\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} - L\boldsymbol{c}_n(0)$$

である．$\boldsymbol{x}$ は正則解であり，$n \leq 20$ の範囲では単位解であることも確かめられる．

一般の奇数 n に関して，B_n の Kaprekar 行列 $M(B_n)$ が正則であるとは限らない．

例 4.2. $\mathrm{rank}(M(B_9)) = 8$ であり，B_9 による *Kaprekar* 方程式の解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix}t-s\\ t-2s\\ t-3s\\ s-1\\ t-1\\ t-1-s\\ 3s-1\\ 2s-1\\ s\end{pmatrix}$$

となる．ここで s に適当な t の *1* 次式を代入することにより，複数の正則解が得られる．

以下は $s = \frac{t}{5},\ \frac{t+1}{5},\ \frac{t+1}{6},\ \frac{11t-49}{60}$ の例である．

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4t\\ 3t\\ 2t\\ t-5\\ 5t-5\\ 4t-5\\ 3t-5\\ 2t-5\\ t\end{pmatrix},\quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4t-1\\ 3t-2\\ 2t-3\\ t-4\\ 5t-5\\ 4t-6\\ 3t-2\\ 2t-3\\ t+1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5t-1\\ 4t-2\\ 3t-3\\ t-5\\ 6t-6\\ 5t-7\\ 3t-3\\ 2t-4\\ t+1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{60}\begin{pmatrix}49t+49\\ 38t+98\\ 27t+147\\ 11t-109\\ 60t-60\\ 49t-11\\ 33t-207\\ 22t-158\\ 11t-49\end{pmatrix}$$

それぞれ，$t \equiv 0 \pmod 5$，$t \equiv 4 \pmod 5$，$t \equiv 5 \pmod 6$，$t \equiv 29 \pmod{60}$ のとき，すべての成分が整数となる．したがって，$t = 29$ では少なくとも *3* 個の *Kaprekar* 数を得られることがわかる．一般に t が増加するほど得られる *Kaprekar* 数の個数も増加する．

予想 4.3. *Class* $B = \{B_n\}_n$ である．

5 Class C

定義 5.1. a を t_0 進 n 桁の *Kaprekar* 数とする．$a = \boldsymbol{x}(t_0)$ となるような複合解 $\boldsymbol{x}(t)$ が存在しないとき，a を単位 *Kaprekar* 数と呼ぶ．

観察から，$\delta=0$ の場合，非特異な単位 Kaprekar 数は $\{A_{s,k}\}$ または $\{B_n\}$ に対応するものであった．同様に，$\delta=0$ においては，一定の手続きで特異な単位 Kaprekar 数を与えることができると予想される．具体的には，以下の手続きである．

t が偶数のとき，

$$\boldsymbol{s}_t=(t-1\; t-3\; \cdots\; 3\; 0\; t-2\; t-4\; \cdots\; 2\; 1)^T$$

は t 進 t 桁 Kaprekar 数となる．$\boldsymbol{s}_t$ は一般に単位 Kaprekar 数ではない．次式は，$\boldsymbol{s}_t$ に Kaprekar 操作を施した場合の計算を筆算の形で示したものである．

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr} & t-1 & t-2 & \cdots & t/2+1 & t/2 & t/2-1 & \cdots & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & \cdots & t/2-2 & t/2-1 & t/2 & \cdots & t-2 & t-1 \\ \hline & t-1 & t-3 & \cdots & 3 & 0 & t-2 & \cdots & 2 & 1 \end{array} \tag{6}$$

このとき，ほぼすべての位で，上段，中段，下段はそれぞれ $\overline{\alpha}$, $\overline{-\alpha}$, $\overline{2\alpha}$ となっている．ただし，$\overline{\alpha}=\alpha+\mathbb{Z}/(t-1)\mathbb{Z}\in\mathbb{Z}/(t-1)\mathbb{Z}$．例外は下から 1, $t/2+1$ 番目の位のみであり，これらは下段の 0 と 1 が逆転している．したがって，集合 $\mathbb{Z}/(t-1)\mathbb{Z}$ への $(\mathbb{Z}/(t-1)\mathbb{Z})^\times$ の部分群 $\langle 2,-1\rangle$ の作用を考えた場合，例外の位に現れる $\{\overline{0}\}$ と $\langle 2,-1\rangle$ 自身を除き，各軌道の要素は式 (6) の上段，中段，下段ともにそれぞれ共通の位を占めることがわかる．それらを削除しても式 (6) は成立し，より小さな桁の Kaprekar 数が得られる．観察の範囲において，それらはすべて単位 Kaprekar 数であった．

定義 5.2. 偶数 $t\geq 4$ に対して，定義 *3.1* の置換行列 $A_{t-1,1}$ を用いて置換行列 C_t を

$$C_t=P_{(n-1\;\; n)}\begin{pmatrix}1 & O & 0\\ O & A_{t-1,1} & O\\ 0 & O & 1\end{pmatrix}$$

と定める．ただし，$A_{t-1,1}$ の次数は $n-2$ であるとする．

C_t による Kaprekar 方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ は特異解となる．なぜならば，$\delta=0$ のとき，置換行列 P による Kaprekar 方程式の解 $\boldsymbol{x}(t)$ が正則解であるための必要条件は $P\in\{A_{s,k}\}$ であったが，$A_{s,k}$ の $(1,1)$ 成分は 0 であり，$C_t\notin\{A_{s,k}\}$ となるためである．

t が奇数のときも，

$$(t-1\; t-2\; \cdots\; 2\; 0\; t-1\; t-2\; \cdots\; 2\; 1\; 1)^T$$

に対して，同様の議論が可能である．ただし，桁を削除して得られた Kaprekar 数に対応する置換は複数あり，そのすべてが特異解を導くため，代表となる置換は恣意的となり得る．ここでは，B_n から，削除した桁に対応する行と列を削除した行列を C_t とする．

以上の手続きでは得られない特異な単位 Kaprekar 数も存在する．表 1 の例外 1 がその例である．

参考文献

[1] Iwasaki, H. A New Classification of the Kaprekar Numbers. Fibonacci Quart., **62**(4), 275—281 (2024)

[2] Prichett, G. D., Ludington, A. L., & Lapenta, J. F. The Determination of All Decadic Kaprekar Constants. Fibonacci Quart. **62**(1), 45—52 (1981)

基数	単位 Kaprekar 数	置換行列
3	20211	B_5
4	132	B_3
	3021	C_4
5	13	$A_{3,1}$
	3032	$A_{5,1}$
	432043211	C_5
6	253	B_3
	41532	B_5
	420432	$A_{7,1}$
	530421	C_6
7	65430653211	C_7
8	25	$A_{3,1}$
	374	B_3
	640632	$A_{9,1}$
	6417532	B_7
	75306421	C_8
9	62853	B_5
	753186532	B_9
	87654320876543211	C_9
10	495	B_3
	6174	$A_{5,1}$
	97508421	C_{10}
	864197532	B_9
11	37	$A_{3,1}$
	74318764	$A_{17,3}$
	97518532	B_9
	A9875430A97653211	C_{11}
12	5B6	B_3
	83B74	B_5
	962B853	B_7
	A850A632	$A_{15,1}$
	A8641B97532	B_{11}
	B97530A86421	C_{12}
	BA986530BA8653211	例外 1

基数	単位 Kaprekar 数	置換行列
13	951A74	$A_{3,1}$
	A97542CC987533	例外 A
	BA9775431CCA98755322	例外 B
14	49	$A_{3,1}$
	6D7	B_3
	CA70C632	$A_{17,1}$
	B852DA853	B_9
	CA8641DB97532	B_{15}
	DB97530CA86421	C_{14}
15	92B6	$A_{5,1}$
	A4E95	B_5
	C962EB853	B_9
	DB98631ECB86532	B_{15}
	DB97541ECA97532	B_{15}
16	7F8	B_3
	C83FB74	B_7
	DA72FC853	B_9
	FDB70E8421	C_{16}
	ECA8641FDB97532	B_{15}
17	5B	$A_{3,1}$
	D91E74	$A_{9,1}$
	EB82GD853	B_9
	DC9753GGCB9744	例外 A
	FDB8651GEBA8532	B_{15}
	FDB9741GEC97532	B_{15}
18	8H9	B_3
	C5HB6	B_5
	C7652ECBA6	$A_{31,5}$
	HFD90G8421	C_{18}
	FC962HEB853	B_{11}
	EDA763HHDBA744	例外 A
	GEC9751HFCA8532	B_{15}
	GECA8641HFDB97532	B_{17}

表 1 単位 Kaprekar 数 ($3 < t \leq 18$, $n \leq 20$) の一覧．例外 1 は Class C に含まれ，例外 A,B は $\delta \geq 1$ である．